

Прикладная эконометрика, 2024, т. 76, с. 120–139.

Applied Econometrics, 2024, v. 76, pp. 120–139.

DOI: 10.22394/1993-7601-2024-76-120-139

А.А. Скроботов¹

Прогнозирование временных рядов при наличии структурных сдвигов

В данной работе приводится обзор различных методов прогнозирования при наличии структурных сдвигов. Обсуждаются методы выбора окна прогнозирования, включающее в себя дату сдвига, методы взвешенного среднего оценок до и после сдвига и методы, основанные на усреднении. Рассмотренные методы сравниваются с точки зрения прогностической силы на примере российских макроэкономических показателей. Результаты демонстрируют превосходство прогнозов, учитывающих наличие сдвигов.

Ключевые слова: временные ряды; структурные сдвиги; прогнозирование; оптимальный прогноз; взвешенная оценка.

JEL classification: C22; C32; C53.

1. Введение

Нестабильность параметров модели является широко распространенным явлением в экономических временных рядах. Она может быть связана с различными событиями, такими как войны, изменение экономической политики, катаклизмы и др. Если исследователь оценивает модель на всем временном диапазоне и пытается строить прогнозы на основе параметров этой полной модели, то ожидается, что возможная нестабильность параметров будет препятствовать получению оптимальных прогнозов. Если бы исследователь знал дату изменения параметров модели, то оценивал бы модель для прогнозирования по тому временному диапазону, где модель является стабильной. Даты изменения параметров модели — даты структурных сдвигов — зачастую являются неизвестными, поскольку некоторые события могут не влиять на изменение поведения временного ряда или влиять с определенным лагом (см., например, обзоры (Скроботов, 2020, 2021a, b)).

Наиболее естественным способом прогнозирования был бы метод на основе разделения выборки: оценивать параметры модели в последнем стабильном режиме, игнорируя выборку до последнего структурного сдвига. Однако, например в работе (Boot, Pick, 2020), авторы делают вывод, что при малых сдвигах игнорирование структурного сдвига может давать даже лучший прогноз, чем прогноз, учитывающий этот структурный сдвиг, за счет информации, полученной на основе всей выборки. Таким образом, возникает вопрос, разумно ли делить выборку на части для прогнозирования, а также, как учитывать дату структурного сдвига для прогнозирования: если длина последнего режима после сдвига очень мала, можно мало выиграть при прогнозировании, если не учитывать в оценивании выборку до этого сдвига.

¹ Скроботов Антон Андреевич — РАНХиГС при Президенте РФ, Москва; antonskrobotov@gmail.com.

В данной работе приводится обзор недавно разработанных методов прогнозирования при наличии структурных сдвигов. Часть методов сосредоточена на выборе окна, на основе которого оценивается модель и производится прогнозирование. Наиболее естественным подходом здесь будет подход, в котором изначально оценивается дата последнего сдвига, а затем прогнозируется показатель на основе подвыборки после этого сдвига. Однако можно использовать и более длинное окно, затрагивающее подвыборку до сдвига, чтобы увеличить эффективность прогнозирования — в разделе 2.1 обсуждаются методы выбора такого окна. В разделе 2.2 рассматриваются подходы, основанные на некотором оптимальном использовании информации до и после структурного сдвига: оценки параметров, использующихся для прогнозирования, являются взвешенными средними оценок после сдвига и до сдвига (или взвешенными средними оценок после сдвига и по всей выборке). Наконец, в разделе 2.3 обсуждаются методы, основанные на комбинации большого числа окон прогнозирования. В качестве эмпирического приложения в разделе 3 рассматривается прогнозирование российских макроэкономических показателей — ВВП, потребление домохозяйств, валовое накопление основного капитала, импорт, экспорт на периоде с 1995 по 2022 г. В заключении формулируются полученные выводы.

2. Методы

2.1. Методы выбора окна для прогнозирования

Hirano, Wright (2022) предлагают метод поиска оцениваемого окна для прогнозирования, когда модель является нестабильной. Если истинная модель является моделью с единственным сдвигом, то оптимальное окно будет включать некоторые наблюдения до сдвига, поскольку получаемое при этом смещение может компенсироваться сокращением дисперсии, как показано в (Pesaran, Timmermann, 2007).

Предполагается, что структурный сдвиг настолько мал, что может быть не обнаруженным стандартными тестами на сдвиги.

Hirano, Wright (2022) получают асимптотическую аппроксимацию свойств методов выбора окна на конечных выборках: как на основе кросс-валидации, так и другими методами. Вычисляются и сравниваются асимптотические риски различных моделей. Кросс-валидация предполагает выбор стартового наблюдения в окне на основе минимизации среднеквадратичного прогноза для вневыборочного периода.

Рассматривается прогнозная модель следующего вида:

$$y_{t+1} = \beta_t' x_t + u_{t+1}, \quad t = 1, \dots, T, \quad (1)$$

где y_{t+1} — зависимая переменная, x_t — вектор регрессоров размерности $p \times 1$, u_{t+1} — ошибка с нулевым средним и дисперсией σ^2 , β_t — вектор параметров размерности $p \times 1$, и предполагается, что этот (нормированный) вектор сходится к некоторому процессу, детерминированному или стохастическому. Например, можно рассмотреть как детерминированный процесс структурного сдвига, так и допустить случайные изменения β_t , например, в виде случайного блуждания или пуассоновских сдвигов. В уравнении (1) предполагается, что на основе информации в момент времени t можно получить прогноз на момент времени $t + 1$.

Пусть имеются данные на момент времени t_1 , и мы хотим оценить модель с момента времени h до момента времени t_1 . Определим оценку скользящего окна с даты h до даты t_1 как

$$\hat{\beta}_{h,t_1} = \left(\sum_{t=h}^{t_1} x_t x_t' \right)^{-1} \sum_{t=h}^{t_1} x_t y_{t+1} \quad (2)$$

или для общих весов $w = \{w_t\}$

$$\hat{\beta}_{w,t_1} = \left(\sum_{t=1}^{t_1} w_t x_t x_t' \right)^{-1} \sum_{t=1}^{t_1} w_t x_t y_{t+1}, \quad (3)$$

где $w_t = I(t \geq h)$. Однако можно рассмотреть и более сложные варианты выбора w_t , например, экспоненциальную $w_t = (1 - \eta/T)^{t_1 - t}$.

Можно получить предельные распределения оценок взвешенного метода наименьших квадратов, которые зависят от вида случайной функции распределения β_t и предельной взвешивающей функции.

Предположим, что наблюдается x_T , и исследователь хочет предсказать значение y_{T+1} . Чтобы сравнивать различные подходы выбора окна для прогнозирования, Hirano, Wright (2022) строят функцию потерь вида

$$L(y_{T+1}, \hat{y}_{T+1}) = (y_{T+1} - \hat{y}_{T+1})^2. \quad (4)$$

Вычитая из потерь дисперсию ошибок σ^2 , поскольку исследователь не может ничего сделать с будущими шоками, получим:

$$R = T \left[E \left((y_{T+1} - \hat{\beta}'_{w,T-1} x_T)^2 \right) - \sigma^2 \right] = TE \left[\left((\hat{\beta}_{w,T-1} - \beta_T)' x_T \right)^2 \right]. \quad (5)$$

Hirano, Wright (2022) получают предельное значение R^* риска R при $T \rightarrow \infty$. Предельные функции риска асимметричные, степень и направление асимметрии зависят от величины структурного сдвига. Hirano, Wright (2022) сравнивают различные модели прогнозирования с точки зрения функции риска, рассматривая имеющиеся и предлагая новые подходы для определения окна для прогнозирования, точнее, номера наблюдения h , начиная с которого производится оценивание модели для прогнозирования.

Hirano, Wright (2022) рассматривают метод выбора $\hat{h}$, предложенный в (Pesaran, Timmermann, 2007), на основе кросс-валидации:

$$\hat{h}_{CV} = \underset{1 \leq h \leq h_{\max}}{\operatorname{argmin}} C(h), \quad (6)$$

где функция кросс-валидации определяется как

$$C(h) = \sum_{t=r}^{T-1} \left(y_{t+1} - \hat{\beta}'_{h,t-1} x_t \right)^2, \quad (7)$$

где $r = [\rho T]$, $h_{\max} = [T(\rho - \xi)]$ для некоторого $\xi > 0$, а $[\cdot]$ обозначает целую часть числа. Можно рассмотреть также модификацию вида

$$\hat{h}_{CV2} = \underset{1 \leq h \leq \min(\hat{T}_1, h_{\max})}{\operatorname{argmin}} C(h), \quad (8)$$

где $\hat{T}_1$ — оцененная дата структурного сдвига. Данный метод оценивает риск по фиксированному окну от r до $T-1$.

Вследствие асимметричности функции риска для метода кросс-валидации и зашумленности функции кросс-валидации Hirano, Wright (2022) предлагают псевдо-байесовскую альтернативу минимизации $C(h)$ и рассматривают псевдо-правдоподобие в терминах параметра h : $L(h) = \exp(-0.5C(h)/\hat{\sigma}^2)$. Тогда оценка для h (оценка кросс-валидации Лапласа) будет иметь вид

$$\hat{h}_{CVL} = \frac{\int hL(h)dh}{\int L(h)dh}. \quad (9)$$

Это псевдо-постериорное среднее с неинформативным априорным распределением для стартовой даты скользящего окна использует всю функцию $C(h)$, а не ее минимум, тем самым учитывая асимметрию функции риска.

Hirano, Wright (2022) также рассматривают экспоненциальную взвешивающую схему с $w_t = (1 - \eta/T)^{t-r}$, так что критерий кросс-валидации будет иметь вид

$$C(\eta) = \sum_{t=r}^{T-1} \left(y_{t+1} - \hat{\beta}'_{w,t-1} x_t \right)^2, \quad (10)$$

где $r = \lfloor \rho T \rfloor$ и $\hat{\beta}'_{w,t}$ — оценка на основе экспоненциальных весов с параметром η . Можно использовать, по аналогии с предыдущим случаем, кросс-валидацию Лапласа:

$$\hat{h}_{CVL}^{EW} = \frac{\int_0^\infty \eta C(\eta) g(\eta) d\eta}{\int_0^\infty \eta g(\eta) d\eta}, \quad (11)$$

где $g(\eta)$ — априорное распределение параметра экспоненциального сглаживания.

В симуляциях Монте-Карло Hirano, Wright (2022) сравнивают предложенные методы с методами Pesaran, Timmermann (2007) и Inoue et al. (2017). Кросс-валидация Лапласа дает меньшие потери по сравнению с обычной кросс-валидацией в большинстве случаев.

В (Inoue et al., 2017) разрабатывается метод выбора окна для прогнозирования, который основан на минимизации квадратичной функции потери. Функциональный вид параметров специфицируется в виде гладкой функции от времени. Преимущества этого метода заключаются в допущении слабой зависимости ошибок и регрессоров, включающих в себя лаговую зависимую переменную и экзогенные переменные. Методы (Pesaran, Timmermann, 2007) требуют отсутствие автокорреляции ошибок и строгую экзогенность регрессоров. Pesaran et al. (2013) требуют независимые ошибки и экзогенные регрессоры. Также допускаются многошаговые прогнозы. Модель Inoue et al. (2017) имеет следующий вид:

$$y_{t+h} = \beta'_{h,t} x_t + u_{t+h}, \quad t = 1, \dots, T, \quad (12)$$

где x_t — вектор регрессоров размерности $p \times 1$, $\beta_{h,t}$ — вектор параметров размерности $p \times 1$, h — горизонт прогноза, T — объем выборки. Эту модель можно записать в виде

$$y_{t+h} = \beta_h(t/T)'x_t + u_{t+h}, \quad t = 1, \dots, T, \quad (13)$$

где $\beta_h(t/T)$ — вектор неизвестных функций размерности $p \times 1$, удовлетворяющих определенным свойствам гладкости.

Оптимальный выбор окна должен минимизировать условную MSFE (mean squared forecast error) вида

$$E_T \left[(y_{t+h} - \beta_h(1)'x_t)^2 \right], \quad (14)$$

где $E_T(\cdot)$ обозначает оператор условного ожидания на основе информации в момент времени T , $\beta_h(1) = \beta_h(T/T)$ — значение параметра в момент времени T . Поскольку функция $\beta_h(\cdot) = \beta(\cdot)$ неизвестна, то она заменяется на $\hat{\beta}_R(\cdot) \equiv \hat{\beta}_{h,R}(\cdot)$ — скользящую (rolling) оценку на основе последних R наблюдений в выборке.

Число последних наблюдений в выборке можно получить, минимизируя (по R) величину $E_T \left[(y_{t+h} - \hat{\beta}_R(1)'x_t)^2 \right]$, что эквивалентно минимизации $(\hat{\beta}_R(1) - \beta(1))' x_t x_t' (\hat{\beta}_R(1) - \beta(1))$. Поскольку мы не знаем $\beta(1)$, эта величина заменяется на локальную линейную оценку $\tilde{\beta}(1)$ с начальным размером окна R_0 (например, на основе (Pesaran, Timmermann, 2007)). Inoue et al. (2017) предлагают минимизировать величину

$$(\hat{\beta}_R(1) - \tilde{\beta}(1))' x_t x_t' (\hat{\beta}_R(1) - \tilde{\beta}(1)) \quad (15)$$

по $R \in [\underline{R}, \bar{R}]$, где можно выбирать $\underline{R} = \max(1.5T^{2/3}, 20)$, $\bar{R} = \min(cT^{2/3}, T-h)$, а $c \in \{4, 5, 6\}$. На первом этапе рекомендуется предварительно тестировать временной ряд на наличие структурных сдвигов.

В экспериментах Монте-Карло сравнивались различные методы выбора окна: из работ (Pesaran, Timmermann, 2007) — 5 методов (post-break method, cross validation, weighted average of forecasts, pooled forecast combination, the trade-off method); (Cai, 2007) — взвешенный метод наименьших квадратов с тремя вариантами локальных оценок (постоянной, линейной и квадратичной); (Anatolyev, Kitov, 2007) — выбор на основе AIC. Предложенный в (Inoue et al., 2017) метод является наилучшим по сравнению с другими методами или близким к наилучшему.

2.2. Методы, основанные на взвешивании наблюдений

Pesaran, Pick, Pranovich (2013) (далее PPP) рассматривают модель со структурным сдвигом следующего вида:

$$y_t = \begin{cases} x_t' \beta_{(1)} + \sigma_{(1)} \varepsilon_t & \text{для } 1 \leq t \leq T_1, \\ x_t' \beta_{(2)} + \sigma_{(2)} \varepsilon_t & \text{для } T_1 + 1 \leq t \leq T, \end{cases} \quad (16)$$

где x_t — вектор экзогенных регрессоров размерности $k \times 1$, $\beta_{(1)}$ и $\beta_{(2)}$ — параметры соответствующей размерности до и после сдвига, $\sigma_{(1)}$ и $\sigma_{(2)}$ — стандартные отклонения инноваций в модели до и после сдвига.

Для выбора оптимальных весов PPP предлагают минимизировать MSFE одношагового прогноза $y_{T+1} = x'_T \hat{\beta}_{PPP}$, где в качестве оценки $\hat{\beta}_{PPP}$ используется

$$\hat{\beta}_{PPP} = \left(\sum_{t=1}^T w_t x_t x'_t \right)^{-1} \sum_{t=1}^T w_t x_t y_t. \quad (17)$$

Обозначая $w_{(1)}$ — веса для наблюдений до сдвига и $w_{(2)}$ — веса для наблюдений после сдвига, PPP получают веса, вид которых упрощается при достаточно больших T и T_1 с фиксированным значением $T - T_1$ и стационарных x_t с положительно определенной матрицей $\Omega := E(x_t x'_t)$. При таких предположениях веса будут иметь следующий вид:

$$w_{(1)} = \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{\lambda_1 + (1 - \lambda_1)(q^2 + T\lambda_1\phi^2)} \quad (18)$$

и

$$w_{(2)} = \frac{1}{T} \cdot \frac{q^2 + T\lambda_1\phi^2}{\lambda_1 + (1 - \lambda_1)(q^2 + T\lambda_1\phi^2)}, \quad (19)$$

$\lambda_1 = T_1/T$, а параметр ϕ определяется как

$$\phi = \frac{x'_{T+1}(\beta_{(1)} - \beta_{(2)})}{\sigma_{(2)}(x'_{T+1}\Omega^{-1}x_{T+1})^{1/2}}. \quad (20)$$

Для модели с двумя сдвигами, которая задается как

$$y_t = \begin{cases} x'_t \beta_{(1)} + \sigma_{(1)} \varepsilon_t & \text{для } 1 \leq t \leq T_1, \\ x'_t \beta_{(2)} + \sigma_{(2)} \varepsilon_t & \text{для } T_1 + 1 \leq t \leq T_2, \\ x'_t \beta_{(3)} + \sigma_{(3)} \varepsilon_t & \text{для } T_2 + 1 \leq t \leq T, \end{cases} \quad (21)$$

при стационарности x_t , постоянной дисперсии σ и достаточно большом числе наблюдений между сдвигами можно получить оптимальные веса следующего вида:

$$w_{(1)} = \frac{1}{T} \cdot \frac{1 + T(\lambda_2 - \lambda_1)\phi_{(2)}^2 - T(\lambda_2 - \lambda_1)\phi_{(1)}\phi_{(2)}}{a_2}, \quad (22)$$

$$w_{(2)} = \frac{1}{T} \cdot \frac{1 + T\lambda_1\phi_{(1)}^2 - T\lambda_1\phi_{(1)}\phi_{(2)}}{a_2}, \quad (23)$$

$$w_{(3)} = \frac{1}{T} \cdot \frac{1 + T\lambda_1\phi_{(1)}^2 + T(\lambda_2 - \lambda_1)\phi_{(2)}^2}{a_2}, \quad (24)$$

где a_2 определяется как

$$a_2 = 1 + T(1 - \lambda_2)\lambda_1\phi_{(1)}^2 + T(\lambda_2 - \lambda_1)(1 - \lambda_2)\phi_{(2)}^2 + T\lambda_1(\lambda_2 - \lambda_1)(\phi_{(1)}^2 - \phi_{(2)}^2)^2, \quad (25)$$

и $\phi_{(i)}$, $i = 1, 2$ определяется как

$$\phi_{(i)} = \frac{x'_{T+1} \gamma_{(i)}}{\sigma(x'_{T+1} \Omega^{-1} x_{T+1})^{1/2}} \quad (26)$$

с $\gamma_{(1)} = \beta_{(1)} - \beta_{(2)}$, $\gamma_{(2)} = \beta_{(2)}$.

Из-за предположения об экзогенности регрессоров динамическая модель не допускается, в противном случае ошибка прогноза будет сложной нелинейной функцией от прошлых ошибок, и получить аналитические выражения для MSFE будет сложно.

Кроме того, написанные выше веса зависят от местоположения и величины сдвига. PPP получают робастные версии весов, не зависящие от мешающих параметров (для одного сдвига), которые определяются как

$$w_t = \frac{w_t^*}{\sum_{s=1}^T w_s^*} \quad \text{для } t=1, \dots, T, \quad (27)$$

где $w_t^* = -\log(1 - t/T)/(T-1)$ для $t=1, \dots, T-1$ и $w_T^* = \log(T)/(T-1)$. Данные веса получены на основе того, что исследователь предполагает равновероятную возможность сдвига в любой момент времени, однако, можно модифицировать веса, если имеется априорная информация о местоположении сдвига. Если предполагается наличие двух сдвигов, робастные веса можно находить численно. Также можно предварительно оценить даты сдвигов и их величины и подставить в соответствующие выражения для весов, зависящих от местоположения и величины сдвига.

В целом, использование методов Монте-Карло в PPP показывает, что когда размер сдвига мал и/или выборка слишком мала для точной оценки процесса сдвига, робастные оптимальные веса обеспечивают наиболее точные прогнозы. Это верно как для дискретных, так и для непрерывных процессов сдвига.

Lee et al. (2022a) предлагают оценивать коэффициенты после сдвига на основе взвешенного обобщенного метода наименьших квадратов с дискретным ядром:

$$\hat{\beta}_{WGLS}(\gamma) = \underset{\beta_{(2)}}{\operatorname{argmin}} \sum_{t=1}^T \left(\frac{y_t - x'_t \beta_{(2)}}{\sigma_t} \right)^2 K(t, \gamma), \quad (28)$$

где $K(t, \gamma) = \gamma I(t \leq T_1) + I(t > T_1)$ для $\gamma \in (0, 1]$ — дискретное ядро. Другими словами, даем единичный вес для наблюдений после сдвига и меньший вес для наблюдений до сдвига. Если $\gamma = 0$, то используются только наблюдения после сдвига. Если $\gamma = 1$, то используются все наблюдения из выборки с одинаковыми весами.

Решением задачи минимизации будет оценка

$$\hat{\beta}_{WGLS}(\hat{\gamma}) = \hat{\Delta}^* \hat{\beta}_{(1)} + (I - \hat{\Delta}^*) \hat{\beta}_{(2)}, \quad (29)$$

где $\hat{\Delta}^* = (\hat{\gamma}^* X'_{(1)} X_{(1)} + X'_{(2)} X_{(2)})^{-1} (\hat{\gamma}^* X'_{(1)} X_{(1)})$, $\hat{\gamma}^* = \hat{\gamma} / \hat{q}^2$, $\hat{q} = \hat{\sigma}_{(1)} / \hat{\sigma}_{(2)}$ — отношение оценок дисперсии до и после сдвига, $X_{(i)} = (x_{T_{i-1}+1}, \dots, x_{T_i})'$. Оценка $\hat{\gamma}$ является решением задачи минимизации следующей функции кросс-валидации:

$$CV(\gamma) = \frac{1}{T - T_1} \sum_{s=T_1+1}^T \left(\frac{y_s - x'_s \hat{\beta}_{WGLS}^{(-s)}(\gamma)}{\sigma_{(2)}} \right)^2, \quad (30)$$

где $\hat{\beta}_{WGLS}^{(-s)}(\gamma)$ обозначает WGLS оценку для β , в которой индекс s идет по периоду после сдвига, и в каждый момент времени удаляются наблюдения в s -й строке наблюдений. Lee et al. (2022a) доказывают асимптотическую оптимальность оценки $\hat{\gamma}$: средняя квадратичная ошибка CV асимптотически настолько мала, насколько мала средняя квадратичная ошибка недоступной наилучшей возможной оценки.

Можно заметить, что оценка PPP является частным случаем оценки Lee et al. (2022a), когда $\gamma^* = w_{(1)}/w_{(2)} = 1/(q^2 + T_1\phi^2)$. Если $\gamma^* > w_{(1)}/w_{(2)}$, то дисперсия WGLS меньше, чем у PPP — если WGLS дает больший вес наблюдениям до сдвига, это увеличивает смещение и уменьшает дисперсию. В экспериментах Монте-Карло проводилось сравнение с пятью методами из (Pesaran, Timmermann, 2007), PPP и методом на основе усредненного окна (Pesaran, Pick, 2011). WGLS лучше или близок к оценкам на основе данных после сдвига, лучше метода PPP и чаще лучше некоторых методов (Pesaran, Timmermann, 2007) и (Pesaran, Pick, 2011) (за исключением случая малого сдвига).

Lee et al. (2022b) предлагают так называемую оценку типа Штейна вида

$$\hat{\beta}_\alpha = \alpha \hat{\beta}_{Full} + (1 - \alpha) \hat{\beta}_{(2)}, \quad (31)$$

где $\hat{\beta}_{Full}$ — оценка по всей выборке, а вес α имеет вид:

$$\alpha = \frac{\tau}{H_T} I(H_T \geq \tau) + I(H_T < \tau), \quad (32)$$

где τ контролирует степень усечения (shrinkage), H_T — статистика типа Хаусмана, измеряющая величину сдвига в коэффициентах и определяемая как

$$H_T = T(\hat{\beta}_{(2)} - \hat{\beta}_{Full})' (\hat{V}_{(2)} - \hat{V}_{Full})^{-1} (\hat{\beta}_{(2)} - \hat{\beta}_{Full}), \quad (33)$$

здесь $\hat{V}_{Full}$ и $\hat{V}_{(2)}$ — состоятельные оценки асимптотических дисперсий $\hat{\beta}_{Full}$ и $\hat{\beta}_{(2)}$ соответственно². Если H_T мало относительно τ (малая величина сдвига в коэффициентах), то $\alpha = 1$, $\hat{\beta}_\alpha = \hat{\beta}_{Full}$, и мы выиграем в эффективности от использования оценки по всей выборке. В противном случае используется взвешенная оценка, и в предельном случае очень большой величины сдвига оценка $\hat{\beta}_\alpha$ становится очень близкой к $\hat{\beta}_{(2)}$. Если сдвиг может быть больше одного, вместо $\hat{\beta}_{(2)}$ и $\hat{V}_{(2)}$ используются соответствующие оценки в последнем режиме.

Выбирать оптимальный τ предлагается на основе минимизации асимптотического риска:

$$\tau^*(\mathbb{W}) = \frac{\text{tr}(\nu)}{\lambda_{\max}(\nu)} - 2, \quad (34)$$

где $\nu = (V_{(2)} - V_{Full})^{1/2} \mathbb{W} (V_{(2)} - V_{Full})$, $\mathbb{W}$ — некоторая положительно определенная взвешивающая матрица. В частном случае, например $\mathbb{W} = (V_{(2)} - V_{Full})^{-1}$, имеем $\tau_{opt} = k - 2$, где k — размерность параметров.

² Если сдвиг больше одного, в качестве $\hat{\beta}_{(2)}$ берется оценка последнего из режимов.

Lee et al. (2022b) получают, что оценку PPP можно записать как

$$\hat{\beta}_c = w_c \hat{\beta}_{Full} + (1 - w_c) \hat{\beta}_{(2)} \quad (35)$$

с $w_c \in [0, 1]$, где веса w_c зависят от местоположения сдвига λ_1, q, ϕ . Таким образом, оценка $\hat{\beta}_c$ принадлежит классу оценок типа Штейна, которая ищет компромисс между смещением и дисперсией, тем самым, оценка типа Штейна должна превосходить оценку PPP с точки зрения асимптотического риска (по крайней мере, быть не хуже). Отметим, что в работе (Lee et al., 2022b) вообще не поясняется, какую $\mathbb{W}$ надо использовать.

2.3. Методы, основанные на усреднении

Altansukh, Osborn (2022) предлагают учитывать неопределенность при оценивании даты сдвига и использовать усреднение прогнозов для каждой потенциальной даты сдвига, входящей в доверительный интервал для этой даты, так что прогноз будет равен

$$\hat{y}_{T+1, CI} = \frac{1}{\hat{T}_{cU} - \hat{T}_{cL} + 1} \sum_{\hat{T}_{cL}+1}^{\hat{T}_{cU}+1} x'_T \hat{\beta}_{t, T}, \quad (36)$$

где $\hat{T}_{cL}$ и $\hat{T}_{cU}$ — нижняя и верхняя границы доверительного интервала для даты сдвига, которые можно получить, например, на основе обращения тестов, как в (Ео, Morley, 2015).

Тестирование на сдвиги для индивидуальных коэффициентов также может увеличить точность прогнозов. Altansukh, Osborn (2022) также рекомендуют учитывать возможный сдвиг в дисперсии (который не обязательно должен совпадать с оценкой сдвига в среднем) путем применения GLS в оценивании коэффициентов.

Усреднение, использующее веса кросс-валидации (рекомендованное в (Pesaran, Timmermann, 2007), работает хорошо относительно других методов при наличии возрастающей дисперсии, но относительно плохо, когда дисперсия уменьшается, и не подходит для случаев, когда сдвиг в коэффициенте происходит в конце выборки.

Pesaran, Pick (2011) предлагают усреднять прогнозы, полученные при разных окнах, на которых оценивается модель:

$$\hat{y}_{T+1, m} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y_{T+1}(w_i), \quad (37)$$

где веса задаются как

$$w_i = w_{\min} + \frac{i-1}{m-1} (1 - w_{\min}), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (38)$$

т. е. процесс оценивания начинается с окна от $T_{\min} + 1$ до T и заканчивается полной выборкой. Число таких окон m может быть фиксированным, а также увеличиваться с ростом T , так что веса можно записать в виде

$$w_i = w_{\min} + \frac{i-1}{T}, \quad i = 1, 2, \dots, T(1 - w_{\min}) + 1. \quad (39)$$

Можно также определить расстояние до сдвига $b = (T - T_1)/T$, которое может сходиться к нулю при росте выборки. Для конкретных моделей (случайного блуждания со сдвигами в сносе и волатильности, линейной модели со сдвигом в коэффициенте наклона) Pesaran, Pick (2011) доказывают, что среднеквадратичная ошибка усредненных прогнозов будет меньше, чем среднеквадратичная ошибка прогноза на основе одного окна, когда величина $T - T_1$ мала (т. е. сдвиг находится в конце выборки).

Наконец, можно также рассмотреть взвешенную оценку наименьших квадратов, которая дает большие веса последним наблюдениям.

3. Прогнозирование

В данном разделе рассмотренные выше методы применяются для прогнозирования российских макроэкономических показателей ВВП, потребления домохозяйств, валового накопления основного капитала, импорта, экспорта, на основе их собственных лагов и временного ряда цен на нефть на периоде с 1995 по 2022 г. (источник — Росстат). Рассматриваются реальные и номинальные показатели, а также сезонные разности логарифмов (сезонные темпы роста), если данные не сглажены сезонно, и первые разности в логарифмах (темпы роста) для сезонно сглаженных данных. Поскольку для прогнозной модели фиксируется набор регрессоров, то их выбор осуществляется на основе работы (Chudik et al., 2023), и в качестве потенциальных регрессоров используются 2 лага всех переменных и цены на нефть. Работа (Chudik et al., 2023) посвящена выбору переменных при возможной нестабильности коэффициентов. Авторы предлагают метод «One Covariate at a time Multiple Testing (OCMT)», который заключается в оценивании индивидуальных регрессий с одним регрессором по отдельности и тестировании его значимости, с использованием скорректированных на множественность тестирования критических значений. Chudik et al. (2023) доказывают, что их процедура обоснована и не требует взвешивания наблюдений согласно местоположению структурного сдвига. Также такая процедура превосходит методы выбора модели на основе пенализации.

Для сравнения качества прогнозов в настоящей статье применяются следующие методы, описанные во втором разделе, использующие конкретные окна для прогнозирования или оценки параметров.

- 1) LS 1 — окно для прогнозирования начинается с оцененной даты сдвига, в предположении, что сдвиг единственный.
- 2) LS BIC — окно для прогнозирования начинается с оцененной даты последнего сдвига, а число сдвигов оценивается на основе BIC в (Bai, Perron, 1998), с перебором числа сдвигов от 0 до 5. Если сдвигов не обнаруживается, окно начинается с первого наблюдения.
- 3) TO — метод компромисса (tradeoff) из (Pesaran, Timmermann, 2007), использующий оценку даты сдвига на основе минимизации сумм квадратов остатков.
- 4) CV All — кросс-валидация из (Pesaran, Timmermann, 2007), с использованием последних 10% наблюдений выборки для определения качества прогноза и рассмотрением всех возможных дат начала окна (начало окна $\hat{h}_{CV}$, формула (6)).
- 5) CV Pre — кросс-валидация из (Pesaran, Timmermann, 2007), с использованием последних 10% наблюдений выборки для определения качества прогноза и рассмотрением дат начала окна только до последней оцененной даты сдвига (начало окна $\hat{h}_{CV2}$, формула (8)).

- 6) CVL All — кросс-валидация Лапласа из (Hirano, Wright, 2022), с рассмотрением всех возможных дат начала окна (начало окна $\hat{h}_{CVL}$, формула (9)).
- 7) CVL Pre — кросс-валидация Лапласа из (Hirano, Wright, 2022), с рассмотрением всех возможных дат начала окна (начало окна $\hat{h}_{CVL}^{EW}$, формула (11)).
- 8) IJR — кросс-валидация без оценивания даты сдвига на основе локальной линейной регрессии из (Inoue et al., 2017).
- 9) WGLS — взвешенная оценка для прогнозирования из (Lee et al., 2022a), использующая оценки до и после сдвига в предположении, что сдвиг один (формула (29)).
- 10) Stein 1 — взвешенная оценка типа Штейна для прогнозирования из (Lee et al., 2022b), использующая оценки на основе всей выборки и после сдвига (формула (31)).
- 11) Stein BIC — взвешенная оценка типа Штейна для прогнозирования из (Lee et al., 2022b), использующая оценки на основе всей выборки и после последнего сдвига.
- 12) PPP — взвешенная оценка из (Pesaran et al., 2013) (формула (35)).
- 13) AVE — оценка на основе усредненных прогнозов (Pesaran, Pick, 2011) (формула (37), $m = 10$, $w_{\min} = 0.2$).
- 14) EXP(0.95) — взвешенная оценка наименьших квадратов (3) на основе экспоненциальных весов $w_t = (1 - \gamma)/(1 - \gamma)^T \gamma^{T-t}$ с $\gamma = 0.95$.
- 15) EXP(0.99) — взвешенная оценка наименьших квадратов (3) на основе экспоненциальных весов $w_t = (1 - \gamma)/(1 - \gamma)^T \gamma^{T-t}$ с $\gamma = 0.99$.
- 16) Full sample — оценка на основе всей выборки.
- 17) AR(1) — оценка на основе авторегрессии первого порядка.

Прогнозы для сравнения строятся начиная с 2015 г. Результаты сравнения — среднеквадратические ошибки RMSE для прогнозов, нормированные к RMSE прогноза по всей выборке — представлены в таблицах 1–4:

- в табл. 1, с использованием реальных сезонных разностей;
- в табл. 2, с использованием номинальных сезонных разностей;
- в табл. 3, с использованием реальных скорректированных сезонно разностей (коррекция здесь и далее произведена на основе процедуры TRAMO-SEATS);
- в табл. 4, с использованием номинальных скорректированных сезонно разностей.

Обозначения в таблицах: GDP — ВВП, Cons — потребление, Inv — инвестиции, Exp — экспорт, Imp — импорт.

Все RMSE нормированы к RMSE наивного прогноза. Результаты демонстрируют, что учет сдвигов в среднем дает более точные прогнозы, чем модели без учета сдвигов типа AR(1).

Результаты таблиц 1–4 трудно интерпретировать, поскольку разные методы на разных горизонтах дают лучшие прогнозы, и сложно выделить какой-то метод или группу методов, которые давали бы равномерно лучшие прогнозы. Для этого рассмотрим все прогнозы относительно наименьших отклонений от оптимального прогноза, вычисляя разность между отношением RMSE конкретного прогноза к RMSE наивного прогноза для заданного горизонта и минимальным отношением RMSE этого же прогноза к RMSE наивного прогноза для заданного горизонта.

Имея 5 временных рядов для прогнозирования по 4 горизонта в каждом, можно сделать 20 прогнозов. Для каждого прогноза сравниваем полученную разность со значением 0.1 (10%) и вычисляем количество прогнозов d , когда полученная разность не превышает 0.1. Результаты приведены в табл. 5.

Таблица 1. RMSE для прогнозов с использованием реальных не скорректированных сезонно данных (Real, seas)

h	LS 1	LS BIC	TO	CV All	CV Pre	CVL All	Pre		WGLS	Stein 1	Stein BIC	PPP	AVE	EXP (0.95)	EXP (0.99)	Full sample	AR(1)
GDP	1	0.46	0.42*	0.49	0.5	0.48	0.47	0.49	0.49	0.47	0.45**	3.09	0.45	0.46	0.48	0.49	0.51
	2	0.42*	0.43	0.42	0.45	0.43	0.43	0.47	0.44	0.45	0.47	1.01	0.43**	0.43	0.48	0.48	0.48
	3	0.33	0.33	0.33	0.35	0.35	0.33	0.36	0.35	0.38	0.38	0.33**	0.34	0.34	0.37	0.38	0.45
	4	0.36	0.36	0.36	0.38	0.37	0.37	0.39	0.37	0.41	0.41	0.36**	0.37	0.36	0.4	0.41	0.45
Cons	1	0.97	3.26	0.96	1.06	1.02	1.04	1.01	1.06	0.94**	0.87*	52.22	1.01	1.04	1.03	1.03	1.01
	2	1.15	1.24	1.15	1.1	1.02	1.13	1.09	1.18	0.96*	1.06	22.61	1.02	1.05	1.05	1.04	1**
	3	1.09	1.22	1.07	1.13	1.12	1.11	1.01	1.01	1	1.07	6.43	0.87*	0.92	0.88	0.88**	0.96
	4	0.97	0.93	0.97	0.98	0.97	0.94	0.98	0.9*	0.94	0.94	0.97	0.9**	0.9	0.93	0.94	0.95
Inv	1	1.08	1.02	1.05	0.79*	0.96	1.02	0.94	0.97	0.93	0.82	12.43	0.83	0.82**	0.89	0.9	0.87
	2	0.76	0.82	0.79	0.85	0.8	0.95	0.91	0.85	0.74	0.7*	2.34	0.73**	0.82	0.83	0.83	0.77
	3	0.57	0.64	0.56*	0.66	0.59	0.59	0.62	0.56**	0.77	0.64	0.65	0.58	0.61	0.64	0.65	0.68
	4	0.54	0.62	0.53	0.61	0.57	0.54	0.52	0.53	0.49	0.30.1	0.54	0.46*	0.5	0.48**	0.49	0.66
Exp	1	0.77	0.77	0.77	0.76**	0.77	0.77	0.79	0.78	0.84	2.2	0.77	0.79	0.76*	0.82	0.84	0.76
	2	0.71	0.72	0.71	0.71	0.71	0.72	0.73	0.72	0.77	0.84	0.71**	0.73	0.71	0.76	0.77	0.71*
	3	0.68	0.68	0.68	0.69	0.68	0.69	0.7	0.7	0.67**	0.75	0.68	0.7	0.69	0.73	0.75	0.67*
	4	0.64**	0.64**	0.64**	0.65	0.65	0.65	0.66	0.66	0.71	0.71	0.66	0.66	0.64	0.69	0.71	0.63*
Imp	1	1.25	2.05	1.18	1.23	1.03	1.09	1*	1.21	0.95	1.33	9.66	1.02	1.02	1.01	1.03	1.08
	2	1.06	1.19	1.06	1.12	1.04	1.04*	1.1	1.09	0.95	1.17	4	1.06	1.06	1.11	1.13	1.06
	3	1.05	0.98	1.04	1.14	1.11	0.97	1.01	0.96	0.94*	39.59	1.05	0.95**	0.98	0.96	0.97	1.01
	4	1.08	0.99	1.07	1.18	1.14	1	1.02	0.96*	0.99	49.52	1.08	0.96**	0.99	0.98	0.99	0.99

Таблица 2. RMSE для прогнозов с использованием номинальных не скорректированные сезонно данных (Nom, seas)

h	LS 1	LS BIC	TO	CV All	CV Pre	CVL All	CVL Pre	IJR	WGLS	Stein 1	Stein BIC	PPP	AVE	EXP (0.95)	EXP (0.99)	Full sample	AR(1)	
GDP	1	0.95	2.17	0.95	0.88	1.03	1.05	0.86**	0.9	8.91	0.97	1.68	8.52	0.83*	1.03	0.96	0.95	0.98
	2	0.81	0.89	0.84	0.77**	0.82	0.86	0.92	0.79	5.71	0.86	0.95	5.57	0.77*	0.86	0.94	0.97	0.95
	3	0.77**	0.93	0.77**	0.79	0.72*	0.79	0.87	0.81	4.93	0.77	0.94	4.79	0.77	0.83	0.92	0.95	0.93
	4	0.54*	0.54*	0.54*	0.62	0.57	0.58	0.75	0.62	2.14	0.75	0.75	2.09	0.67	0.72	0.88	0.93	0.92
Cons	1	0.94	1.07	0.94	1.03	1.02	0.98	1.02	0.92	14	1.05	1.14	14	0.89*	0.94	1.01	1.09	0.91**
	2	0.88	1.07	0.88**	1.01	0.89	1.09	0.93	0.95	8.82	1.02	1.04	8.82	0.86*	0.93	0.96	1.02	0.89
	3	0.72	0.98	0.72**	1	0.72*	1.08	0.83	0.98	0.9	0.74	0.89	0.9	0.8	0.85	0.91	0.98	0.88
	4	0.71*	0.71*	0.71	0.79	0.71*	0.84	0.83	0.84	0.72	0.85	0.85	0.71	0.79	0.81	0.94	1	0.89
Inv	1	1	2.04	1.03	1.07	1.04	1.05	0.92*	0.95**	11.01	1.18	1.7	10.97	0.95	0.99	1.11	1.17	0.99
	2	1.25	1.64	1.25	1.15	1.11	1.3	1.12	1.17	6.8	1.02	1.27	6.61	0.93*	1.05	1.07	1.08	0.98**
	3	0.88	0.73	0.87	0.85	0.84	0.98	0.82	0.87	5.79	0.73**	0.85	5.46	0.71*	0.83	0.94	1	0.96
	4	0.85	0.79	0.85	0.83	0.79	1.07	0.96	0.8	7.11	0.8	1.01	6.78	0.73*	0.77**	0.99	1.07	0.95
Exp	1	0.95	1.05	0.95	0.99	0.96	0.94	0.99	0.97	2.81	0.97	1.02	2.81	0.97	0.91*	0.93**	0.94	1.02
	2	1.04	0.98*	1.04	1.17	1.12	1.01	1.08	1.13	1.64	1.04	1.02	1.69	1.07	1.1	1.03	1.02	1.01
	3	0.98	0.97	0.98	1.05	1.02	0.96	1.04	0.97	0.86**	1.05	1.05	0.86*	0.98	1.02	1.03	1.05	1
	4	0.97	0.94*	0.97	1.09	0.99	0.98	0.98	0.98	0.97	0.99	0.99	0.97	0.96**	1.01	0.98	0.99	1.02
Imp	1	0.56	0.69	0.56	0.71	0.61	0.63	0.59	0.56**	4.58	0.7	0.67	4.58	0.56*	0.6	0.68	0.7	0.67
	2	0.73	0.67	0.73	0.63	0.61	0.63	0.6	0.65	3.66	0.73	0.64	3.56	0.58*	0.6	0.59**	0.63	0.65
	3	0.48	0.49	0.48*	0.51	0.49**	0.52	0.52	0.49	0.57	0.62	0.62	0.56	0.5	0.51	0.57	0.61	0.64
	4	0.47	0.52	0.47	0.48	0.48	0.46**	0.48	0.46*	0.47	0.56	0.56	0.47	0.46	0.46	0.52	0.56	0.64

Таблица 3. RMSE для прогнозов с использованием реальных скорректированных сезонно данных (Real, adj)

h	LS 1	LS BIC	TO	CV All	CV Pre	CVL All	CVL Pre	IJR	WGLS	Stein 1	Stein BIC	PPP	AVE	EXP (0.95)	EXP (0.99)	Full sample	AR(1)
GDP	1	0.32*	0.35	0.33**	0.33	0.33	0.34	0.33	1.75	0.36	0.36	1.75	0.33	0.33	0.35	0.36	0.38
	2	0.32	0.33	0.32**	0.33	0.32	0.33	0.33	0.67	0.32	0.34	0.72	0.32*	0.32	0.32	0.33	0.34
	3	0.29	0.3	0.29*	0.3	0.3	0.3	0.3	0.29**	0.3	0.38	0.29	0.3	0.3	0.3	0.3	0.33
	4	0.32	0.33	0.32	0.32	0.32	0.33	0.32*	0.32**	0.33	2.45	0.32	0.32	0.32	0.33	0.33	0.33
Cons	1	0.96	1.42	0.95	1	0.98	0.96	0.97	5.26	0.97	1.21	5.27	0.95**	0.95*	0.96	0.97	0.97
	2	0.97	0.99	0.97	0.95	0.95	0.95	0.93*	18.14	0.93**	0.94	18.27	0.94	0.94	0.95	0.95	0.96
	3	0.94	0.93	0.94	0.94	0.93	0.94	0.93**	0.93	0.94	1.05	0.94	0.93*	0.93	0.93	0.93	0.94
	4	0.96	0.96	0.96	0.97	0.96	0.96	0.96	0.96	0.96	1.57	0.96	0.96*	0.96**	0.96	0.96	0.96
Inv	1	0.34	0.36	0.35	0.36	0.35	0.36	0.33	3.28	0.35	0.36	3.28	0.32*	0.32**	0.34	0.35	0.48
	2	0.3	0.28	0.3	0.31	0.3	0.29	0.28	0.3	0.28	0.32	0.3	0.27*	0.28	0.27**	0.27	0.53
	3	0.28	0.26	0.27	0.3	0.29	0.28	0.26	0.27	0.26	0.39	0.28	0.25*	0.27	0.26**	0.26	0.26
	4	0.29	0.26	0.28	0.31	0.29	0.28	0.27	0.28	0.26	0.65	0.29	0.26*	0.27	0.26**	0.26	0.43
Exp	1	0.94	0.96	0.95	0.95	0.95	0.96	0.95	0.95	0.94	0.97	0.94**	0.95	0.95	0.96	0.96	0.93*
	2	0.88	0.9	0.88	0.89	0.88	0.88**	0.88	0.88	0.89	19.68	0.88	0.89	0.89	0.9	0.9	0.88*
	3	0.83*	0.86	0.83	0.83	0.83	0.85	0.83	1.17	0.83**	0.87	1.22	0.84	0.83	0.85	0.86	0.83
	4	0.81	0.82	0.81	0.81	0.81	0.82	0.81	1.4	0.8**	0.85	1.46	0.81	0.81	0.82	0.82	0.8*
Imp	1	0.86	0.95	0.92	0.88	0.92	0.9	0.85*	4.98	0.95	0.99	4.98	0.89	0.88**	0.93	0.95	0.9
	2	0.85*	0.93	0.89	0.9	0.9	0.88	0.91	5.74	0.87	0.94	5.8	0.88	0.87**	0.92	0.94	0.97
	3	0.98	0.95	0.98	1.02	1	0.96	0.97	4.88	0.95	2.31	4.93	0.94**	0.95	0.94	0.94	0.95
	4	0.95	0.92	0.95	1	0.99	0.93	0.94	0.95	0.92	2	0.95	0.91*	0.93	0.91	0.92	0.91**

Таблица 4. RMSE для прогнозов с использованием номинальных скорректированных сезонно данных (Nom, adj)

h	LS 1	LS BIC	TO	CV All	CV Pre	CVL All	CVL Pre	IJR	WGLS	Stein 1	Stein BIC	PPP	AVE	EXP (0.95)	EXP (0.99)	Full sample	AR(1)
GDP	1	0.74	0.71	0.73	0.57	0.55	0.59	0.52**	0.53	8.43	0.61	0.6	8.16	0.55	0.62	0.62	0.85
	2	0.58	0.6	0.58	0.59	0.58	0.59	0.6	0.58	0.57*	0.66	1.95	0.58**	0.59	0.63	0.66	0.79
	3	0.54	0.55	0.52	0.51**	0.55	0.49*	0.61	0.6	2.65	0.56	0.56	2.64	0.55	0.58	0.62	0.8
	4	0.59	0.57	0.57**	0.6	0.6	0.59	0.58	0.62	1.01	0.62	0.6	1.06	0.56*	0.59	0.59	0.77
Cons	1	0.9	0.89*	0.9	0.92	0.9**	0.9	0.9	0.97	4.93	0.9	0.9	4.93	0.92	0.98	0.9	0.91
	2	0.89*	0.89*	0.9**	0.9	0.9	0.9	0.92	0.94	1.02	0.96	0.96	1.02	0.92	0.94	0.95	0.96
	3	0.83	0.83	0.83**	0.83	0.83	0.83	0.84	0.84	0.83*	0.89	0.89	0.83	0.84	0.87	0.89	0.9
	4	0.89*	0.89*	0.89**	0.94	0.89	0.9	0.91	0.9	0.93	0.92	0.92	0.95	0.9	0.91	0.93	0.94
Inv	1	0.67	0.68	0.6	0.5	0.62	0.44	0.44	0.44**	5.11	0.47	0.48	4.91	0.38*	0.45	0.53	0.84
	2	0.9	0.9	0.8	0.56	0.81	0.59	0.56	0.51**	8.69	0.73	0.73	8.58	0.46*	0.57	0.55	0.8
	3	0.37	0.37	0.37	0.38	0.37	0.38	0.41	0.38	0.37*	0.49	0.49	0.37**	0.4	0.38	0.45	0.78
	4	0.66	0.66	0.66	0.55	0.64	0.56	0.56	0.48**	9.04	0.66	0.66	8.96	0.46*	0.55	0.62	0.78
Exp	1	0.97	0.99	0.97	1.02	0.98	0.98	1.02	0.98	0.97*	0.99	0.99	0.97**	0.97	0.98	0.98	1
	2	0.97	0.98	0.97	1.05	0.99	0.98	1.01	0.99	0.97*	0.98	42.37	0.97**	0.97	0.99	0.98	1
	3	0.88	0.89	0.88	0.95	0.9	0.9	0.9	0.91	0.88*	0.89	0.98	0.88**	0.88	0.91	0.88	0.96
	4	0.93	0.9*	0.93	0.97	0.94	0.92	0.92	0.94	0.92	0.9**	1.15	0.93	0.91	0.94	0.9	0.9**
Imp	1	0.64*	0.66	0.64	0.64	0.64	0.65	0.64**	0.65	1.85	0.67	2.45	1.85	0.65	0.65	0.65	0.67
	2	0.64	0.66	0.64	0.65	0.64	0.65	0.64	0.65	0.64*	0.66	1.05	0.64	0.64**	0.64	0.65	0.68
	3	0.64	0.66	0.64	0.64**	0.65	0.64	0.65	0.64	0.71	0.65	6983.47	0.69	0.64*	0.64	0.65	0.69
	4	0.65	0.66	0.65	0.65	0.65	0.65	0.64	0.65	1.43	0.64*	0.84	1.41	0.64**	0.65	0.65	0.71

Таблица 5. Количество прогнозов, когда разность между отношением RMSE конкретного прогноза к RMSE наивного прогноза для заданного горизонта и минимальным отношением RMSE этого же прогноза к RMSE наивного прогноза для заданного горизонта не превышает 0.1

	LS 1	LS BIC	TO	CV All	CV Pre	CVL All	CVL Pre	IJR	WGLS	Stein 1	Stein BIC	PPP	AVE	EXP (0.95)	EXP (0.99)	Full sample	AR(1)
Real, seas	13	8	12	8	15	15	15	10	4	14	6	4	17	15	18	16	14
Nom, seas	11	2	11	8	11	9	9	7	1	10	3	0	17	7	5	4	11
Real, adj	16	14	17	16	16	16	15	17	7	15	6	7	16	16	17	15	19
Nom, adj	16	13	16	17	18	19	17	16	7	16	7	7	15	15	13	14	15

Можно видеть, что для сезонных разностей логарифмов реальных не скорректированных сезонно данных наилучшими методами будут AVE и EXP(99), для которых d равно 17 и 18 соответственно (при максимально возможном значении 20). Если рассматривать сезонные разности логарифмов номинальных не скорректированных сезонно данных, то наилучшим методом будет AVE со значением $d = 17$. Вторым наилучшим методом будут LS1, TO и AR(1) со значением $d = 11$. Для сезонно сглаженных реальных данных оптимальным с точки зрения параметра d будет простой AR(1) прогноз с $d = 19$ (т.е. почти всегда отклонения от оптимального прогноза для AR(1) не очень большие), и наименее предпочтительными будут прогнозы на основе взвешивания (WGLS, Stein 1, Stein BIC, PPP). Для сезонно сглаженных номинальных данных максимальное значение d будет у метода CVL All (равное 19), а также CV Pre (равное 18).

Наконец, в качестве иллюстрации превосходства моделей со сдвигами на рис. 1 демонстрируется сопоставление фактической траектории временного ряда (черная жирная линия) с его прогнозами на 1, 2, 3 и 4 квартала вперед для каждой даты (серые линии), где в качестве прогнозных моделей используются оптимальные для конкретного горизонта и конкретного временного ряда. Везде прогнозы улавливают тенденции временного ряда, особенно на коротких горизонтах. На более длинных кажется, что прогноз приближается к своему долгосрочному среднему. Единственное несоответствие оказалось во время пандемии COVID-19 для всех рядов, кроме ВВП, где прогнозы, очевидно, не могут улавливать такие большие шоки.

4. Заключение

В данной работе анализируются способы прогнозирования временных рядов при наличии структурных сдвигов. Приводится обзор методов, классифицированных на три группы: методы выбора окна прогнозирования, методы, основанные на взвешивании и методы, основанные на усреднении. Все эти методы сравниваются с точки зрения прогнозной силы на примере российских макроэкономических временных рядов. Демонстрируется, что в целом учет структурных сдвигов улучшает прогнозы, причем методы на основе усреднения и на основе кросс-валидации часто являются предпочтительными. Также прогнозы ожидаемо получаются лучше на коротких горизонтах.

Благодарности. Статья подготовлена в рамках выполнения научно-исследовательской работы государственного задания РАНХиГС. Автор выражает благодарность Андрею Полбину за плодотворное обсуждение и ценные замечания, способствовавшие значительному улучшению статьи.

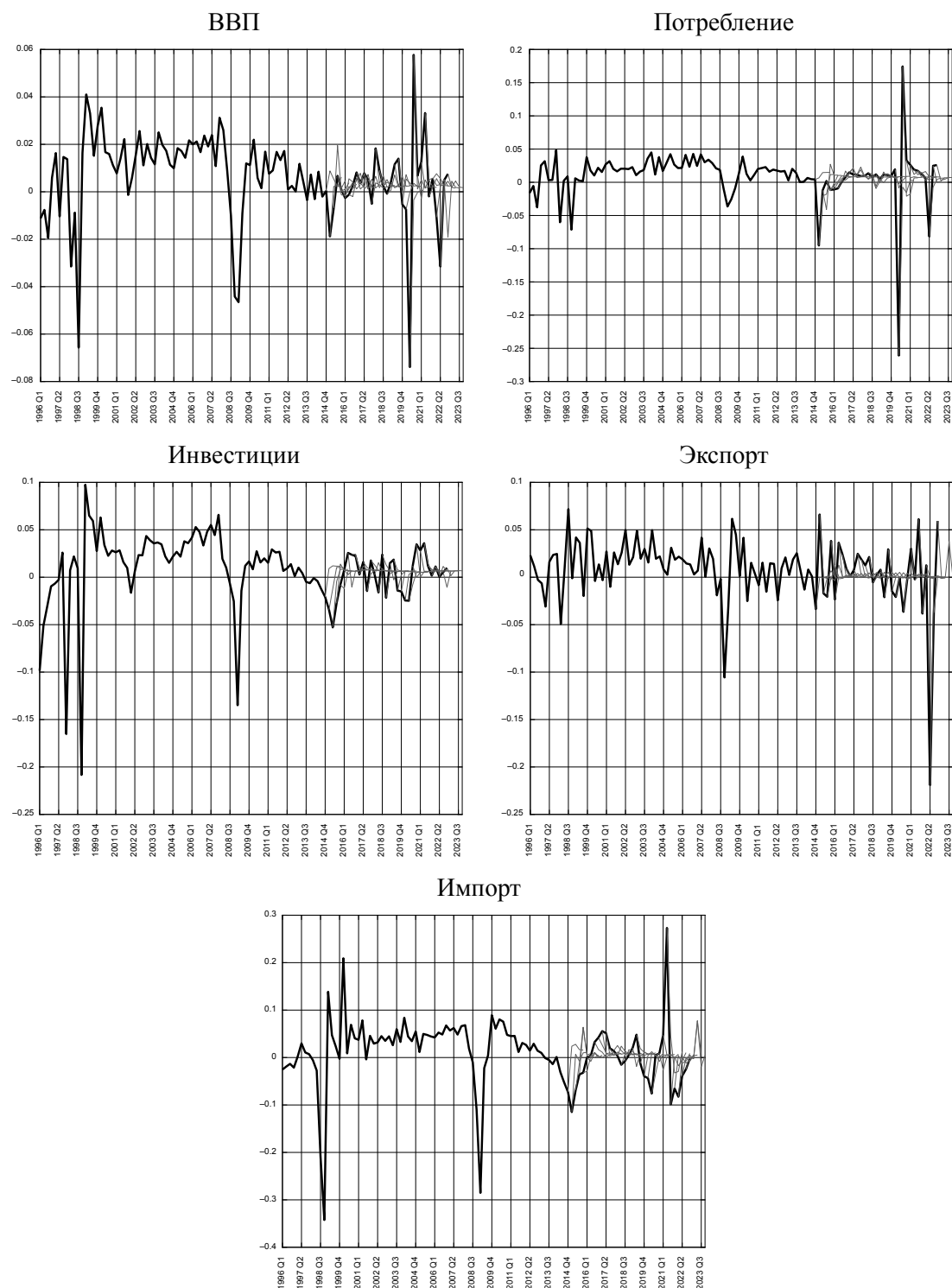


Рис. 1. Фактические и прогнозные значения реальных показателей, сезонно-скорректированные данные, первые разности

Список литературы

- Скроботов А. (2020). Структурные сдвиги и тестирование на единичный корень. *Прикладная эконометрика*, 58, 96–141. DOI: 10.22394/1993-7601-2020-58-96-141.
- Скроботов А. (2021a). Структурные сдвиги в моделях коинтеграции. *Прикладная эконометрика*, 63, 117–141. DOI: 10.22394/1993-7601-2021-63-117-141.
- Скроботов А. (2021b). Структурные сдвиги в моделях коинтеграции: многомерный случай. *Прикладная эконометрика*, 64, 83–106. DOI: 10.22394/1993-7601-2021-64-83-106.
- Altansukh G., Osborn D. R. (2022). Using structural break inference for forecasting time series. *Empirical Economics*, 63, 1–41. DOI: 10.1007/s00181-021-02137-w.
- Anatolyev S., Kitov V. (2007). Using all observations when forecasting under structural breaks. *Finnish Economic Papers*, 20, 166–176.
- Bai J., Perron P. (1998). Estimating and testing linear models with multiple structural changes. *Econometrica*, 66 (1), 47–78. DOI: 10.2307/2998540.
- Boot T., Pick A. (2020). Does modeling a structural break improve forecast accuracy? *Journal of Econometrics*, 215 (1), 35–59. DOI: 10.1016/j.jeconom.2019.07.007.
- Cai Z. (2007). Trending time-varying coefficient time series models with serially correlated errors. *Journal of Econometrics*, 136, 163–188. DOI: 10.1016/j.jeconom.2005.08.004.
- Chudik A., Pesaran M. H., Sharifvaghefi M. (2023). Variable selection in high dimensional linear regressions with parameter instability. *arXiv*: 2312.15494. <https://arxiv.org/abs/2312.15494>.
- Eo Y., Morley J. (2015). Likelihood-ratio-based confidence sets for the timing of structural breaks. *Quantitative Economics*, 6 (2), 463–497. DOI: 10.3982/QE186.
- Hirano K., Wright J. H. (2022). Analyzing cross-validation for forecasting with structural instability. *Journal of Econometrics*, 226 (1), 139–154. DOI: 10.1016/j.jeconom.2020.10.009.
- Inoue A., Jin L., Rossi B. (2017). Rolling window selection for out-of-sample forecasting with time-varying parameters. *Journal of Econometrics*, 196 (1), 55–67. DOI: 10.1016/j.jeconom.2016.03.006.
- Lee T.-H., Parsaeian S., Ullah A. (2022a). Forecasting under structural breaks using improved weighted estimation. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 84 (6), 1485–1501. DOI: 10.1111/obes.12512.
- Lee T.-H., Parsaeian S., Ullah A. (2022b). Optimal forecast under structural breaks. *Journal of Applied Econometrics*, 37 (5), 965–987. DOI: 10.1002/jae.2908.
- Pesaran M. H., Pick A. (2011). Forecast combination across estimation windows. *Journal of Business and Economic Statistics*, 29 (2), 307–318. DOI: 10.1198/jbes.2010.09018.
- Pesaran M. H., Timmermann A. (2007). Selection of estimation window in the presence of breaks. *Journal of Econometrics*, 137 (1), 134–161. DOI: 10.1016/j.jeconom.2006.03.010.
- Pesaran M. H., Pick A., Pranovich M. (2013). Optimal forecasts in the presence of structural breaks. *Journal of Econometrics*, 177 (2), 134–152. DOI: 10.1016/j.jeconom.2013.04.002.

Поступила в редакцию 19.04.2024;
принята в печать 17.06.2024.

Skrobotov A. A. Time series forecasting under structural breaks. *Applied Econometrics*, 2024, v. 76, pp. 120–139.

DOI: 10.22394/1993-7601-2024-76-120-139.

Anton Skrobotov

RANEPA, Moscow, Russian Federation;

antonskrobotov@gmail.com

Time series forecasting under structural breaks

In this paper, we overview the forecasting methods in the presence of structural breaks. Methods for selecting a forecast window that includes the break date, weighted average methods of pre- and post-break estimators, and averaging-based methods are discussed. The considered methods are compared in terms of predictive power using Russian macroeconomic time series. The results demonstrate the superiority of forecasts that take into account the presence of break.

Keywords: time series; structural breaks; forecasting; optimal forecast; weighted estimator.

JEL classification: C22; C32; C53.

References

- Skrobotov A. (2020). Survey on structural breaks and unit root tests. *Applied Econometrics*, 58, 96–141 (in Russian). DOI: 10.22394/1993-7601-2020-58-96-141.
- Skrobotov A. (2021a). Structural breaks in cointegration models. *Applied Econometrics*, 63, 117–141 (in Russian). DOI: 10.22394/1993-7601-2021-63-117-141.
- Skrobotov A. (2021b). Structural breaks in cointegration models: Multivariate case. *Applied Econometrics*, 64, 83–106 (in Russian). DOI: 10.22394/1993-7601-2021-64-83-106.
- Altansukh G., Osborn D. R. (2022). Using structural break inference for forecasting time series. *Empirical Economics*, 63, 1–41. DOI: 10.1007/s00181-021-02137-w.
- Anatolyev S., Kitov V. (2007). Using all observations when forecasting under structural breaks. *Finnish Economic Papers*, 20, 166–176.
- Bai J., Perron P. (1998). Estimating and testing linear models with multiple structural changes. *Econometrica*, 66 (1), 47–78. DOI: 10.2307/2998540.
- Boot T., Pick A. (2020). Does modeling a structural break improve forecast accuracy? *Journal of Econometrics*, 215 (1), 35–59. DOI: 10.1016/j.jeconom.2019.07.007.
- Cai Z. (2007). Trending time-varying coefficient time series models with serially correlated errors. *Journal of Econometrics*, 136, 163–188. DOI: 10.1016/j.jeconom.2005.08.004.
- Chudik A., Pesaran M. H., Sharifvaghefi M. (2023). Variable selection in high dimensional linear regressions with parameter instability. *arXiv*: 2312.15494. <https://arxiv.org/abs/2312.15494>.
- Eo Y., Morley J. (2015). Likelihood-ratio-based confidence sets for the timing of structural breaks. *Quantitative Economics*, 6 (2), 463–497. DOI: 10.3982/QE186.
- Hirano K., Wright J. H. (2022). Analyzing cross-validation for forecasting with structural instability. *Journal of Econometrics*, 226 (1), 139–154. DOI: 10.1016/j.jeconom.2020.10.009.

- Inoue A., Jin L., Rossi B. (2017). Rolling window selection for out-of-sample forecasting with time-varying parameters. *Journal of Econometrics*, 196 (1), 55–67. DOI: 10.1016/j.jeconom.2016.03.006.
- Lee T.-H., Parsaeian S., Ullah A. (2022a). Forecasting under structural breaks using improved weighted estimation. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 84 (6), 1485–1501. DOI: 10.1111/obes.12512.
- Lee T.-H., Parsaeian S., Ullah A. (2022b). Optimal forecast under structural breaks. *Journal of Applied Econometrics*, 37 (5), 965–987. DOI: 10.1002/jae.2908.
- Pesaran M. H., Pick A. (2011). Forecast combination across estimation windows. *Journal of Business and Economic Statistics*, 29 (2), 307–318. DOI: 10.1198/jbes.2010.09018.
- Pesaran M. H., Timmermann A. (2007). Selection of estimation window in the presence of breaks. *Journal of Econometrics*, 137 (1), 134–161. DOI: 10.1016/j.jeconom.2006.03.010.
- Pesaran M. H., Pick A., Pranovich M. (2013). Optimal forecasts in the presence of structural breaks. *Journal of Econometrics*, 177 (2), 134–152. DOI: 10.1016/j.jeconom.2013.04.002.

Received 19.04.2024; accepted 17.06.2024.